Základy fyzikálních měření

studijní materiál k laboratorním cvičením z fyziky
sekunda, terice, kvarta

Základy fyzikálních měření

Obsah

1. Úvod

Slovo "pokrok" už nemá tak jednoznačně dobrý zvuk jako dříve. Znečištění ovzduší, strach z radioaktivity i jiné stíny dnešního světa způsobují, že se lidé na každý nový objev dívají s jistou nedůvěrou. Asi jako v tom starém úsloví : jeden myslel, až vymyslel trakař, a pak ho musel vozit.

Samozřejmě - nemusel. Mohl dál nosit náklady na zádech. Nový objev mu jen nabídl volbu, tak jako ji nabízí nám. I my si můžeme vybrat : buď budeme elektřinu vyrábět převážně spalováním uhlí (a budeme ničit lesy zplodinami), nebo jadernými reakcemi (a budeme žít v iracionálním strachu před únikem radioaktivity), nebo se bez elektřiny úplně obejdeme (a budeme dřít ručně). Před objevem jaderných reakcí existovaly jen dvě z těchto alternativ, před objevem elektřiny jedna. Dnes máme na výběr ze tří a s rostoucí znalostí přírodních zákonů se náš výběr dál rozšiřuje - například o možnost spotřebovávat méně energie a přitom nesnížit svou životní úroveň.

To, že nám věda dává víc možností, ovšem neznamená, že se automaticky budeme mít lépe. Záleží totiž i na tom, kterou z možností si vybereme, a o tom už nerozhodují sami vědci, ale hlavně politici a ekonomové pod vlivem a konrtolou široké veřejnosti. Tedy my všichni; a abychom z rozšiřující se nabídky možností vybrali tu nejlepší, musíme být dobře informováni. Když nebudeme vědět o důsledcích a průvodních jevech každé z alternativ, bude naše rozhodování náhodným taháním z klobouku.

Fyzika není ani zdaleka tak nepochopitelná, jak si většina lidí myslí. Je samozřejmé, že pro tvůrčí činnost ve fyzice je třeba jednak mít určitý talent, jednak zvládnout některé techniky práce, především matematiku. To jistě není jednoduché. Ale pochopení základního smyslu fyzikálních zákonů a jevů je něco jiného než tvůrčí práce; toto pochopení je možné prakticky vždy i bez speciálního matematického vzdělání, stejně jako základní funkce a vztahy orgánů v lidském těle můžeme pochopit i bez studia biochemie. [1]

Ukázat, že fyzika vlastně není nic hrůzostrašného, a dát studentům do života alespoň základní přehled je jedním z hlavních cílů výuky fyziky na střední škole. Její součástí jsou i laboratorní práce, ke kterým je coby studijní pomůcka určeno toto skriptum.

[1] Úvod převzat z [1].

2. Fyzikální práce

Podívejme se nyní na to, jak vlastně fyzik pracuje. Fyziku můžeme podle metod práce rozdělit na dvě základní větve - **teoretickou** a **experimentální**. Tyto dvě větve spolu nicméně tvoří nedílný celek a jedna bez druhé nemají smysl. Experimentální fyzik se zabývá pozorováním jevů a procesů, které v přírodě probíhají (a pokud nemá vhodné podmínky k pozorování ve svém okolí, vytvoří si je uměle v laboratoři). Teoretik se pak snaží pozorované jevy popsat a předpovědět nové pomocí matematiky a vzorců (říkáme, že vytváří tzv. *matematické modely* daného jevu). O co vlastně jde, ozřejmí jednoduchý příklad:

Vraťme se do minulosti a pozorujme při práci mistra cechu tesařského, kterak se snaží postavit lopatkové kolo k vodnímu mlýnu. Je krásné ráno, ptáci zpívají a nad dravý proud řeky vyskakují ryby. Voda pění okolo balvanů a opracovaných žulových kvádrů, tam, kde by se již zanedlouho mělo otáčet mlýnské kolo. No jo, říká si řemeslník, hledě na jiskřivou vodní hladinu, ale jaké by asi mělo mít rozměry? Když bude malé, neutáhne mlýnský kámen. Když velké, spotřebuji příliš mnoho dřeva, příšerně se nadřu a kolo se nakonec zhroutí vlastní vahou. Jak musí být lopatka kola velká, aby byla v tomhle proudu tak akorát? To je lapálie!

Mistr se nejprve chvíli drbal na hlavě a krčil čelo, pak jej ale napadla vynikající myšlenka. Zkusí sílu proudu na nějakém kusu dřeva a porovná ji se silou, která je nutná na rozpohybování mlýnských kamenů! A tu snadno zjistí, stačí se do žernovu opřít. I nelenil bodrý muž, vzal dřevěnou desku tak loket na loket a vstoupil do proudu. Síla, kterou na dřevěnou plochu voda tlačila byla na první pohled dost malá. Mlýn bude chtít nejméně desetkrát tolik. Ale jak má tedy být velká lopatka?

No, když má být síla desetkrát větší, bude muset být deska dlouhá a široká desetkrát víc, napadlo mistra. Takže sehnat desky deset na deset loket a můžu začít. Ale počkat - to je nějak moc velké. Radši to ještě vyzkouším. Když vezmu prkno dva na dva lokte, bude na něj řeka opravdu působit dvakrát větší silou?

Vzal tedy mistr prkno dva na dva lokte a opět vkročil do vody. A ouha, co se nestalo! Proud se zakousl do desky s takovou vervou, že se muž skoro neudržel na nohou. Síla, kterou voda na dřevo působila, nebyla dvakrát, ale přinejmenším čtyřikrát taková, jako před tím! Tesař vylezl, posadil se na kámen a hluboce se zahloubal.

Tak jak to tedy vlastně je. Když dvakrát zvětším rozměry desky, nezvětší se síla dvakrát, ale čtyřikrát. Jak je to možné? Když voda tlačí na plochou desku… a… no jasně! Voda přece tlačí na celou plochu desky. Ale plochu jsem zvětšil čtyřikrát, když se dvakrát změnila délka a šířka! Takže síla poroste ne s rozměrem, ale povrchem lopatky! To musím zkusit! Nacpu do vody támhleten stůl, ten má tak tři na tři a když síla vzroste devětkrát… tak… tak to půjdu večer oslavit!

Jak řekl, tak se i stalo. Na stůl voda skutečně tlačila asi tak devětkrát více a mistr již věděl, která bije. Síla, která působí na prkna ponořená do vody je přímo úměrná jejich ploše, o čemž večer bujaře a halasně zpravil celou krčmu. Ráno pak začal vyrábět lopatky k mlýnskému kolu s rozměrem tři na čtyři lokte, na které bude voda působit dvanáctkrát více, než na původní malou zkušební desku a netrvalo dlouho, a mlýn začal spokojeně klapat.

Dávná historie, říkáte si, ale mistr v našem příběhu pracoval nevědomky tak, jak to dodnes dělají fyzici - sledoval posloupnost teoretických a experimentálních prací. Experimentátor (či pozorovatel) zjistí, že v přírodě probíhá nějaký děj, a změří, jak konkrétně. Jeho výsledky vezme teoretik a snaží se je popsat nějakými vzorci či rovnicemi. Tyto vzorce a rovnice musí souhlasit s tím, co dříve experimentátor naměřil, a musí předpovědět výsledky pokusu i za jiných podmínek než byl původně proveden. Experimentátor pak provede pokus v nových podmínkách a určí, zda teoretikův matematický model předpověděl jeho výsledek správně. Pokud ne, musí teoretik model opravit. Pokud ano, jsou na světě nové, fungující vzorečky, které se mohou nejen s velkou slávou objevit v písemkách, ale přinést i nějaký užitek. Podívejme se na práci mistra tesařského podrobněji:

- Mistr nejprve provedl úvodní pokus. Zjistil, že na čtvercovou desku o jednotkové straně (zde byla jednotka jeden loket) ponořené kolmo do proudu působí nějaká síla. Tuto sílu si označme F_0.

- Aby odvodil potřebné rozměry výsledné lopatky, sestavil první teorii. V ní usoudil, že síla působící na lopatku je přímo úměrná délce strany lopatky, tedy

  $$F = x.F_0$$

  kde x je délka strany lopatky v loktech.

- Na základě této teorie předpověděl, že vezme-li čtvercovou desku o straně dlouhé dva lokte, bude na ni působit síla dvojnásobná, tj. $F = 2F_0$.

- Tuto předpověď ověřoval experimentálně. Po provedení pokusu s deskou 2×2 lokte ale zjistil, že skutečná hodnota síly je $F = 4F_0$.

- Jelikož tento výsledek byl s jeho teorií v hrubém rozporu, nezbylo mu než vytvořit teorii novou. V té předpokládal, že síla je přímo úměrná ponořené ploše. Matematicky vyjádřeno pro čtvercovou plochu

  $$F = S.F_0 = x^2.F_0$$

  nebo

  $$F = S.F_0 = a.b.F_0$$

  pro obdélníkovou. Tento nový vzorec odpovídá oběma předchozím měřením (pro $x = 1$ i $x = 2$) a předpovídá, že pro $x = 3$ bude výsledná síla devítinásobná.

- Mistr provedl další měření, tentokrát s deskou tři na tři, a zjistil, že síla je opravdu přibližně devítinásobná. Usoudil proto, že jeho nový vzorec (tj. matematický model) je správný, a může tedy posloužit při stavbě mlýna - při rozměrech lopatky 3×4 lokte bude síla, kterou voda na lopatku působí dvanáctinásobná (tj. $F = 12.F_0$), což dostačuje k pohonu mlýnského kamene a zároveň bude kolo přijatelných rozměrů.

Vzorec tohoto dávného hrdiny našich skript mohl sloužit při stavbě dalších mlýnů, zdymadel, jezů a podobných zařízení další stovky let, pak ale přišla modernější doba a s ní potřeba vodních turbín. Konstrukce turbíny je velmi zdlouhavá, nákladná a náročná na přesnost. Inženýrům najednou tesařův vzorec přestal stačit. Nutně si museli položit otázku, jak se síla změní, nebude-li lopatka rovinná (sami z vlastní zkušenosti víte, že táhnout mísu pod vodou dnem napřed dá mnohem méně práce, než do ní vodu nabírat), jak se projeví změna rychlosti vody (respetive je-li síla také přímo úměrná rychlosti vody či nikoliv) a je-li vůbec původní historický vzorec dostatečně přesný. Provedli tedy množství dalších měření a zjistili, že krásná a jednoduchá tesařova přímá úměra je jen velmi přibližná a pro konstrukci moderních vodních děl absolutně nedostačující.

Nové soubory teorií, kterým dnes souhrnně říkáme *hydrodynamika*, vznikaly po desítky let úsilím mnoha fyziků a kroutí se v nich všelijací hadi, řecká písmena, rovnítka, nerovnítka a jiné mnohočetné matematické symboly. Hydrodynamika již není krásně jednoduchá a přímočará, ovšem dokáže předvídat chování kapalin při vysokých rychlostech a tlacích, a to dosti přesně. Její vývoj však začal onoho památného dne na břehu dravé říčky a od té chvíle pak pokračoval posloupností teoretických a experimentálních prací až k její dnešní podobě.

Zapamatujte si, že nekončící posloupnost **teorie** a **experimentu** je základním úhelným kamenem fyziky a že nelze na obě odvětví pohlížet odděleně. Jedno bez druhého neznamená nic - jen společně mohou rozšířit a zužitkovat poznatky lidstva. A protože na základních i středních školách jsou v klasických hodinách fyziky probírány výlučně teoretické poznatky, zůstala by vám bez hodin *laboratorních prací* široká nevzhledná mezera ve vzdělání. Při pokusech, které budete sami konat, se (alespoň v hrubých obrysech) seznámíte s činností experimentálních fyziků a zjistíte, že to je vlastně docela zábava.

3. Fyzikální veličiny a jednotky

Určitě jste si povšimli, jak neohrabaně se mistr tesařský z úvodní kapitoly vyjadřoval, když mluvil o výsledcích svých pokusů. Tvrzení *"byla to taková síla, jako když vložím dřevěnou desku do řeky"* bylo sice možná dostatečně jasné pro něj, ale jakýkoliv jiný tesař, který by podle jeho návodu chtěl stavět mlýn, by asi jen nechápavě kroutil hlavou. Nevěděl by, jakou řeku první řemeslník myslí, a i kdyby, tak proud se přeci během roku mění. Stejně tak by si nemohl udělat představu z věty *"to byla síla, jakou jsem musel vynaložit na rozhýbání mlýnských kamenů"*, neboť mlýnské kameny jsou různě veliké a různě drsné. Jediná možnost, jak první tesař mohl své zkušenosti předat druhému, byla dovést kolegu k oné řece a mlýnským kamenům a nechat ho, ať si vše osahá. Zajisté uznáte, jak příšerně nepraktický tento způsob je. Stejně nepraktický, jako přijít do obchodu, říct *"chci látku na šaty"* a na prodavačovu otázku *"a mnoho-li"* odpovědět *"přiměřeně."*

Proto se velmi záhy v prvních lidských civilizací objevily tzv. **jednotky**. Jednotka je nějaké ustálené, předem dohodnuté množství. Kupříkladu starodávná jednotka hmotnosti byla *kámen*. Její původ je nasnadě - to se jednou kmenoví náčelníci sešli u poradního ohně, vzali pěkný balvan a zaznamenali, že v sýpkách je tolik obilí, kolik by vyvážilo deset krát deset a pět takovýchto balvanů [2]. Každý z náčelníků si před odchodem ke svému kmeni našel kámen úplně stejný, aby měl přehled. Podobné kameny pak převzali i obchodníci a další kmeny - a první jednotka hmotnosti byla na světě.

Možná se teď někteří z vás ušklíbáte nad primitivností dávných lidí, ale měli byste si uvědomit, že to dodnes děláme úplně stejně. Jednotka **kilogram** je také jen dohodnuté, ustálené množství hmoty, které má "támleten kámen". Náš současný "kámen" je sice ze speciálních slitin, uschovaný pod několika skleněnými poklopy a pečlivě odstíněn před vnějšími vlivy v Mezinárodním úřadu pro váhy a míry v Sèvres, ale v principu není moderní měření hmotnosti o nic nápaditější než před tisíci lety.

Vraťme se nyní k debatě našich mistrů tesařských. Předpokládejme, že oba znali jednotku hmotnosti "kámen". Pak mohl první druhému říct *byla to taková síla, jakou by na tvou nataženou ruku působil právě jeden kámen, když ho neseš*, a druhý by hned přesně věděl, o co se jedná. Stejně tak ctihodná měšťanka kupující látku by prodavači patrně sdělila *"prosím čtyři lokte"*, a prodavač by ihned odmotal z balíku sukno, čtyřikrát ovinul kolem své ohnuté ruky a - jak jinak - požadoval přemrštěnou cenu[3].

Teď zpět do moderní doby, k současné fyzice. Jak víte, fyzika se zabývá studiem hmotných objektů, jejich vlastností a stavů, ve kterých se nacházejí. Fyzikální vlastnosti, stavy a jejich změny vyjadřujeme tzv. **fyzikálními veličinami**. Abychom se drželi předchozího příkladu, řekněme si, že vlastnost jakéhokoliv objektu je kupříkladu *množství hmoty* v něm obsažené. Tuto vlastnost jsme pojmenovali veličinou

---

[2] Pro přesnost - naši předci by obilí měřili spíše na objem, je to praktičtější. Zajisté jste všichni slyšeli pojem "měřice ovsa". Měřice je stará dutá míra (tzn. jednotka objemu).

[3] Loket byla v minulosti velmi často používaná jednotka délky právě díky jednoduchosti, s jakou se dala odměřit při prodeji látek.

vlastnost	veličina	zn.	jednotka	zn. jed.
množství hmoty [4]	hmotnost	m	kilogram	kg
růst neuspořádanosti vesmíru [5]	čas	t	sekunda	s
velikost v jednom rozměru	délka	l	metr	m
velikost ve dvou rozměrech	plocha	S	metr čtverečný	m^2
velikost ve třech rozměrech	objem	V	metr kubický	m^3
pobídka k pohybu	síla	F	Newton	N

TABULKA 1. Některé vlastnosti fyzikálních objektů, příslušné veličiny, značky veličin, jednotky a značky jednotek.

hmotnost. Stanovit hodnotu fyzikální veličiny znamená *porovnat ji* s určitou, předem dohodnutou hodnotou veličiny téhož druhu, kterou volíme za **jednotku**. Jednotka hmotnosti je - překvapivě - kilogram. Hodnotu veličiny pak číselně udáváme jako násobek dohodnuté jednotky. Zjistíme-li například při vážení, že nějaké těleso má hmotnost 2× větší než zvolená jednotka, říkáme, že má hmotnost 2 kilogramy. Výsledek pak zapisujeme ve tvaru:

$$m = 2\ kg,$$

kde m je označení pro hmotnost námi zkoumaného objektu a kg značka pro kilogram.

V tabulce 1 jsou uvedeny některé vlastnosti fyzikálních objektů, příslušné veličiny, značky veličin, jednotky a značky jednotek.

Tutéž hodnotu fyzikální veličiny můžeme vyjádřit v různých jednotkách. Podle toho, jakou jednotku zvolíme, získáme různé číselné hodnoty. Zajisté nikoho nepřekvapí následující rovnost :

$$l = 0.5\ m = 50\ cm = 500\ mm.$$

Zde jsme volili jednotky metry, centimetry a milimetry. Stejně tak můžeme volit různé jednotky třeba rychlosti (metry za sekundu, kilometry za hodinu) :

$$v = 20\ ms^{-1} = 72\ kmh^{-1}.$$

[4]V Newtonově mechanice taktéž setrvačnost.

[5]Ani nechtějte vědět, co tohle znamená. Definovat čas je značný problém - jen si to sami zkuste.

Je zřejmé, že **číselná hodnota závisí na vobě jednotky a sama o sobě nemá smysl**! Až se vás učitel fyziky zeptá, kolik vám úloha vyšla, a vy mu odpovíte *"dvacet,"* očekávejte, že spolu s nějakým tím malým bezvýznamným mínus dostanete hned i další otázku: *"dvacet čeho?"*

3.1. **Soustavy fyzikálních veličin a jednotek.** Nyní už víme, co jsou to jednotky, ale radovat se nad vlastní chytrostí stále ještě nemůžeme. Říct, že jednotka je předem dohodnuté, ustálenené množství je sice snadné, ale bystrý člověk musí okamžitě namítnout : *"no jo, ale kdo to množství určí?"*. Dokážete si zajisté představit scénu, kdyby zákazník přišel do obchodu, požadoval "kámen" brambor a prodavač položil na váhu oblázek poloviční hmotnosti, než si zákazník přestavoval. A o tom, že středověký prodavač látek s krátkými pažemi byl oproti svému kolegovi s pažemi dlouhými ve značné výhodě, zajisté netřeba dlouze diskutovat. Tento problém, který je z našeho pohledu přece tak snadné vyřešit zavedením jednotek platných pro celý svět, se táhl po milénia. Od kmene ke kmeni či od národa k národu starověku se měřilo ve zcela jiných jednotkách, což samozřejmě značně ztěžovalo jak obchod, tak rozvoj věd. I ve středověku bylo běžné, že každé město mělo svůj vlastní loket, unci a měřici. Tento stav vytrval do nedávné minulosti. Sami jistě znáte jednotky "míle", "libra", "galon" či "pinta", které se ještě před pár desítkami let oficiálně používaly ve Velké Británii a způsobovaly tak nevýslovný zmatek zahraničním turistům[6].

První rozhodný krok k překonání těchto obtíží byl učiněn v době Velké francouzské revoluce na sklonku 18. století. Francouzské Národní shromáždění rozhodlo o nutnosti likvidace tehdejšího chaosu v oblasti měrových jednotek a r. 1790 pověřilo Francouzskou akademii vypracováním vyhovující soustavy měr upotřebitelné po celém světě. Tyto snahy získaly mezinárodní ohlas a r. 1875 došlo k ustanovení *Mezinárodní metrické konference* (Convention Internationale du Mètre, ICM), jejíž hlavním programem bylo zavedení desetinné soustavy a metru jako jednotky délky. Mezinárodní metrická konvence vznikla za účasti 18 států [7], které zřídily *Mezinárodní úřad pro váhy a míry* (Bureau International des Poids et Mesures) v Sèvres u Paříže. Ten je zodpovědný za celosvětovou standardizaci jednotek. Na základě těchto mezinárodních dohod byla u nás, stejně jako ve všech ostatních signatářských zemích, uzákoněna *Mezinárodní soustava jednotek* (Système International d'Unités), zkráceně označovaná jako **SI**.

3.2. **Mezinárodní soustava jednotek SI.** Mezinárodní soustavu SI tvoří sedm základních jednotek, jednotky odvozené, vedlejší a násobky a díly jednotek. Sedm základních jednotek je uvedeno v tabulce 2.

Tyto jednotky jsou definovány následovně:

- **Metr** je délka trajektorie, kterou proběhne světlo ve vakuu za 1/299792458 sekundy.

[6] A dodnes se používají, byť neoficiálně. Budete-li chtít v londýnské putyce půllitr piva, pravděpodobně neuspějete. Ale pintu vám zajisté natočí okamžitě a rádi.

[7] Česko bylo členem ICM od počátku v rámci Rakousko-Uherska.

Základní jednotky SI			
Základní veličina	značka	Základní jednotka	značka
délka	l	metr	m
hmotnost	m	kilogram	kg
čas	t	sekunda	s
elektrický proud	I	ampér	A
termodynamická teplota	T	kelvin	K
látkové množství	n	mol	mol
svítivost	I	kandela	cd

Tabulka 2. Soustava SI.

- **Kilogram** je hmotnost mezinárodního prototypu uloženého v Sèvres.
- **Sekunda** je doba rovnající se 9172631770 periodám záření, které odpovídá přechodu mezi dvěma hladinami velmi jemné struktury základního stavu prvku ^{133}Cs.
- **Ampér** je stálý elektrický proud, který při průtoku dvěma rovnoběžnými, přímými a nekonečně dlouhými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu umístěnými ve vakuu ve vzájemné vzdálenosti 1 metru, vyvolá mezi nimi stálou sílu o velikosti 2×10^7 Newtonu na 1 metr délky.
- **Kelvin** je 1/273.16 část termodynamické teploty trojného bodu vody.
- **Mol** je látkové množství soustavy, která obsahuje právě tolik elementárních jedinců (entit), kolik je atomů v nuklidu uhlíku $^{12}_{6}C$ o hmotnosti $0,012\ kg$.
- **Kandela** je svítivost zdroje, který v daném směru vysílá monofrekvenční záření o kmitočtu $540 \times 10^{12}\ Hz$ a jehož zářivost v tomto směru je 1/683 wattu na steradián.

Vidíte, že jednotky lze definovat mnoha rozmanitými způsoby a leckdy i velmi komplikovaně. Tato komplikovanost ale není bezúčelná. Vezměme si kupříkladu definici kilogramu. Tato jednotka je definována pomocí tzv. *prototypu.* To je právě onen dohodnutý "kámen", o kterém byla řeč dříve. Každý stát, který se účastní ICM, má za povinnost okopírovat si tento prototyp a podle něj pak kalibrovat přístroje (váhy).

Na první pohled je prototyp jednotky jednoduché a elegantní řešení, ve skutečnosti je tomu ale právě naopak. Uvědomte si, že žádné těleso nemá nikdy zcela konstantní hmotnost - dejme tomu obyčejný plastový hřeben. V okamžiku, kdy se s ním učešete a ulpí na něm pár vašich vlasů, jeho hmotnost se nepatrně změní. Ba dokonce stačí se jej jen dotknout - trocha potu a vaší kůže na něm zůstane a změní jeho váhu. U hřebenu to samozřejmě není na závadu, s prototypem jednotky se ale nic podobného nesmí stát. Je proto pod mnoha skleněnými poklopy, aby se na něj neprášilo, a nelze se jej dotýkat holýma rukama - pouze speciálními kleštičkami. Zajisté si dokážete představit, jaké komplikace to způsobuje při manipulaci. A kromě toho, přesná hmotnost libovolného předmětu závisí i na teplotě a složení okolí. Na povrchu každého materiálu jsou totiž absorbovány[8] plyny. Množství molekul, které v předmětu uváznou, závisí na teplotě, tlaku a koncentraci daného plynu. Prototyp musí tedy být uložen v prostředí se stálou teplotou, tlakem, vlhkostí a tak podobně.

Z toho vám musí být zcela jasné, že chce-li si experimentální fyzik překalibrovat váhu podle prototypu nebo jeho kopie, podstoupí asi vyčerpávající martyrium. Proto je pro praxi mnohem výhodnější, jsou-li jednotky definovány nějakým *měřicím postupem*. To je například metr. Jednotka délky se ještě poměrně nedávno určovala také pomocí prototypu. V Sèvres byla za stejně přísných podmínek uložena iridiová tyč se speciálním průřezem (v podstatě to byla malá traverza), na které byla dvěma vrypy označena délka jednoho metru. Kvůli všem výše uvedeným nepříjemnostem mezi kterými kraloval fakt, že délka kovové tyče se mění s její teplotou, nakonec prototypovou definici metru fyzici zavrhli a vymysleli lepší. Vycházeli z faktu, že rychlost světla ve vakuu ($c = 299792458\ ms^{-1}$ a nějaké drobné) je velmi přesně známa (podle staré definice metru samozřejmě). Proto určili, že metr je taková vzdálenost, kterou urazí světlo za 1/299792458 sekundy ve vakuu. Tím se sice délka metru poněkud změnila, ovšem tato změna nastala až velmi hluboko v desetinných místech, takže pro technickou i vědeckou praxi byla zcela nepodstatná. Chce-li si nyní vědec přesně okalibrovat přístroj na měření délky, stačí, aby si ve své vlastní laboratoři přeměřil rychlost světla a je to [9].

Jedinou prototypovou jednotkou dnes zůstává právě kilogram. Zatím nebyl nalezen způsob, jak jej definovat pomocí nějakého fyzikálního vztahu - to čeká jen na vás, mladé, nadějné experimentální fyziky.

Definice jednotek si samozřejmě nemusíte pamatovat, zaregistrujte ale, že většinou vycházejí z fyziky mikrosvěta (frekvence záření, jádra atomů apod). To je dáno tím, že vztahy v mikrosvětě se s časem nemění [10], nedají se nijak narušit, dva mikrosystémy tvořené shodnými částicemi mají zcela shodné vlastnosti a elementární částice jsou všude dostupné v libovolném počtu. Dva fyzici, měřící tutéž jednotku pomocí vztahů z mikrosvěta, tudíž dostanou shodné výsledky nezávisle na čase, místě měření a okolních laboratorních podmínkách. Jsou omezeni výlučně přesností svých přístrojů.

[8] Pokud toto slovo neznáte, nahraďte si jej například výrazem "přiblemcány".

[9] Takto stavěná definice ovšem znamená, že pokud se rychlost světla změří přesněji, změní se zároveň i délka metru. Nepředpokládá se ovšem, že by taková změna byla nějak významná. Strach, že budete muset kupovat nová pravítka není na místě!

[10] Což se nedá říct o vztazích v makrosvětě. Kdybyste například sekundu definovali jako 1/86400 doby za kterou se Země otočí kolem své osy, bude délka sekundy postupně růst. To je dáno tím, že rotace Země se pomalu ale jistě zpomaluje. Za pár miliard let se bude ke Slunci natáčet stále stejnou stranou, jako to dělá třeba Merkur, nebo Měsíc vůči Zemi.

3.3. **Jednotky odvozené a vedlejší.** Kromě sedmi základních jednotek v sobě soustava SI zahrnuje množství jednotek odvozených, vedlejších a jejich nejrůznějších zlomků. **Odvozená jednotka** se ze základních dostane pomocí definičních vztahů odpovídajících fyzikálních veličin. Například rychlost rovnoměrného přímočarého pohybu definujeme jako

$$v = \frac{s}{t} \quad ,$$

kde s je dráha a t doba trvání pohybu. Poněvadž jednotka dráhy (tj. délky) je metr a jednotka času sekunda, jednotka rychlosti bude *metr za sekundu*, tj.

$$[v] = \frac{m}{s} = ms^{-1} \quad .$$

Je-li fyzikální veličina uzavřena v hranatých závorkách, znamená to, že se hovoří o její jednotce. Tímto způsobem je možné odvodit **všechny** používané jednotky, na které si jen vzpomenete. Tak například jednotka síly v moderní fyzice není "kámen v natažené ruce", nýbrž z definičního vztahu odvozená $kgms^{-2}$:

$$F = m.a \quad ,$$

a protože jednotka zrychlení je $[a] = ms^{-2}$, bude

$$[F] = kgms^{-2} \quad .$$

Obdobně odvodíme například jednotku tlaku:

$$p = \frac{F}{S} \qquad \Rightarrow \qquad [p] = \frac{kgms^{-2}}{m^2} = kgm^{-1}s^{-2} \quad .$$

Stejně tak jednotka energie vychází z definice mechanické práce :

$$W = F.s \qquad \Rightarrow \quad [W] = [E] = kgms^{-2}.m = kgm^2s^{-2} \quad .$$

Pro zjednodušení zápisů, mluvy a také z historických důvodů mají některé odvozené jednotky vlastní názvy. V tabulce 3 jsou přehledně seřazeny nejpoužívanější veličiny klasické mechaniky, jejich odvozené jednotky, názvy jednotek a značky.

Všimněte si, že ve všech uvedených jednotkách se vyskytují kombinace výhradně tří základních jednotek: *kilogram*, *metr* a *sekunda*. V klasické mechanice se s jinými nesetkáte a neoficiálně jsou považovány mezi hlavními jednotkami SI za ty "hlavnější". Soustava SI proto bývá někdy označována za *kgms soustavu* [11]

[11] Existují i jiné soustavy. Kupříkladu cmgs. kde jsou základními mechanickými jednotkami gram, centimetr a sekunda. Z této soustavy pochází například jednotka energie "erg", se kterou se lze setkat ve starší sci-fi literatuře.

Některé odvozené jednotky SI			
Veličina	jednotka	jméno jednotky	značka
rychlost (v)	ms^{-1}		
zrychlení (a)	ms^{-2}		
hybnost (p)	$kgms^{-1}$		
moment hybnosti (L)	kgm^2s^{-1}		
síla (F)	$kgms^{-2}$	newton	N
moment síly (M)	kgm^2s^{-2}		
frekvence (f)	s^{-1}	hertz	Hz
práce a energie (W), (E)	kgm^2s^{-2}	joule	J
výkon (P)	kgm^2s^{-3}	watt	W
moment setrvačnosti (I)	kgm^2		
tlak (p)	$kgm^{-1}s^{-2}$	pascal	Pa

Tabulka 3. Některé odvozené jednotky SI.

Předpona	exa	peta	tera	giga	mega	kilo	hekto	deci
Značka	E	P	T	G	M	k	h	d
Mocnina	10^{18}	10^{15}	10^{12}	10^9	10^6	10^3	10^2	10

Předpona	mili	mikro	nano	piko	femto	atto
Značka	m	μ	n	p	f	a
Mocnina	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}

Tabulka 4. Předpony a odpovídající mocniny.

Z praktických důvodů jsou do SI zahrnuty další jednotky, které sice mezi hlavní nepatří, nicméně pro danou veličinu se jich v běžném životě často užívá. To jsou tzv. **jednotky vedlejší**, jako třeba *minuta* (m), *hodina* (h) a *rok* (r), a dále pak *litr* (l) nebo *tuna* (t). Z vedlejších jednotek, suplujících odvozené jednotky SI, jmenujme *elektronvolt* (eV), což je jednotka energie hojně využívaná v jaderné a částicové fyzice. Až na poslední jmenovanou při praktických výpočtech obvykle převádíme vedlejší jednotky na hlavní či odvozené.

Násobky a díly jednotek se tvoří ze základních a odvozených pomocí mocnin o základu deset. Jejich názvy se skládají z pevně dané předpony a názvu jednotky. Například 1 *kilo*metr je tisíc (tj. 10^3) metrů. Jedna *mili*sekunda je 0.001 (tj. 10^{-3}) sekundy. Značka zlomku jednotky má také určenou příponu: 1 $km = 1000\ m$, resp. 1 $ms = 0.001\ s$. Předpony, značky a mocniny jsou v tabulce 4.

Tyto normalizované předpony byly zavedeny proto, že některé základní jednotky jsou příliš malé nebo naopak velké, a v běžné praxi se užívají daleko častěji jejich násobky. Jdete-li na výlet, obvykle nehovoříte o tom, kolik jste již ušli metrů. V elektrotechnice existuje odvozená jednotka kapacity kondenzátoru *farad*. Ta je však obrovská a běžné kondenzátory, které koupíte v obchodech s elektronickými součástkami, mají nejvýše mikrofarady či pikofarady. Podobných příkladů zajisté dokážete sami najít přehršli [12].

3.4. **Výpočty a rozměrová analýza.** Navzdory názvu, nebudeme se v této kapitole věnovat ani měření, ani počítání délek, ploch či objemů, nýbrž budeme pokračovat v povídání o jednotkách. Jednotce dané veličiny se řidčeji říká *rozměr veličiny* a my se podrobněji podíváme na to, jaký význam mají jednotky ve fyzikálních výpočtech.

Z matematiky jste zvyklí, že jakákoliv neznámá v libovolné rovnici či nerovnici je prostě číslo a není třeba hlouběji uvažovat nad jeho významem. Fyzika sice používá matematické metody a své předpovědi a domněnky vyvozuje také na základě vzorců, ovšem neznámé ve fyzikálních rovnicích nejsou jen pouhá čísla. Jsou to veličiny, a jak vám bylo již dříve zdůrazněno, číselná hodnota veličiny bez udání jednotky nemá smysl! Dosadíte-li do fyzikální rovnice číselnou hodnotu požadované veličiny bez toho, abyste si ověřili, že tak činíte také v požadovaných jednotkách, budete se pravděpodobně velmi divit, co vám to vychází za nesmysly. Podívejme se na typický písemkový příklad:

- *Voják vystřelil z pušky kolmo vzhůru k nebi. Výbuch střelného prachu předal střele o hmotnosti 0.05 kilogramů energii 1210 J. V jaké výšce se nachází střela, je-li její rychlost právě 500 km/h?*

Toto je jednoduchý příklad na zákon zachování energie. Víte (nebo se to časem na hodinách fyziky dozvíte), že celková energie se při mechanických dějích zachovává. Střela, která letí kolmo vzhůru působením zemské tíže zpomaluje a ztrácí kinetickou (pohybovou) energii, získává ale stejnou měrou energii potenciální (polohovou). Matematicky vyjádřeno

$$E = E_k + E_p = konstanta \quad ,$$

kde E je celková energie střely, E_k její kinetická a E_p potenciální energie. Celková energie střely je samozřejmě ta, co získala výbuchem střelného prachu, tedy $E = 1210\ J$. Potenciální energii v gravitačním poli Země lze blízko u jejího povrchu vyjádřit jako

$$E_p = m.h.g \quad ,$$

[12]Povšimněte si, že z historického důvodu je základní jednotkou SI *kilo*gram, nikoliv gram, jak by asi bylo logické.

kde m je hmotnost střely, h je její výška nad povrchem a g gravitační zrychlení Země. To je fyzikální konstanta vyjadřující změnu rychlosti libovolného tělesa při volném pádu za jednu sekundu. Stejně tak umíme vypočíst energii kinetickou:

$$E_k = \frac{1}{2} m.v^2 \quad ,$$

kde m je rovněž hmotnost střely a v její rychlost. Nyní chceme zjistit neznámou výšku h z ostatních, známých veličin. Dosadíme-li tyto dva vztahy do prvního, získáme

$$E = E_k + E_p \qquad \Rightarrow \qquad E_p = E - E_k$$

$$m.g.h = E - \frac{1}{2} m.v^2$$

$$h = \frac{E - \frac{1}{2} m.v^2}{m.g}$$

Dosadíme hodnoty. Víme, že gravitační zrychlení Země je $g = 10\ ms^{-2}$ (hodnotu můžeme najít třeba v tabulkách) a ostatní veličiny jsou zadány. Tedy

$$h = \frac{1210 - \frac{1}{2}.0,05.500^2}{0,05.10} = \frac{1210 - 0,025.250000}{0,5} =$$

$$= \frac{1210 - 6250}{0,5} = -10080\ m$$

Vyšlo nám, že takovou rychlost bude mít střela deset kilometrů pod povrchem Země, což je evidentní nesmysl. Mohu vám ale soukromě sdělit, že existují lidé, kteří jsou schopni něco takového v písemce opravdu napsat a práci odevzdat.

Někde je tedy chyba, ale kde? I po libovolně dlouhém hledání zjistíme, že vzorce jsou upraveny dobře. Chyba zde tkvěla v dosazování číselné hodnoty příslušné k jiné jednotce, než vzorec vyžaduje. Všechny veličiny jsme měli zadány v základních jednotkách: hmotnost střely v kilogramech, energii v joulech a gravitační zrychlení v metrech za sekundu na druhou. Není proto překvapující, že i rychlost střely musí být do vzorce dosazena v základních jednotkách - těmi ale nejsou kilometry za hodinu, nýbrž metry za sekundu! Musíme tedy rychlost střely vyjádřit v ms^{-1}. Jak na to? Víme, že hodina má šedesát minut a ta zas šedesát sekund, a víme také, že 1 kilometr je 1000 metrů. Můžeme tedy provést následující úpravu:

$$v = 500\ \frac{km}{h} = 500\ \frac{1000\ m}{60\ min} = 500\ \frac{1000\ m}{60 \times 60\ s} = 500\ \frac{1000\ m}{3600\ s} =$$

$$= 500 \times \frac{1000}{3600}\,\frac{m}{s} = \frac{500}{3,6}\,ms^{-1} \doteq 139\,ms^{-1}$$

Dosadíme-li nyní správnou hodnotu rychlosti[13], získáme

$$h = \frac{1210 - \frac{1}{2}.0,05.139^2}{0,05.10} = \frac{1210 - 0,025.19321}{0,5} =$$

$$= \frac{1210 - 483}{0,5} = 1454\,m \doteq 1,5\,km$$

To už je relativně rozumné číslo, a zanedbáme-li odpor vzduchu, tak i pravdivé. Zkuste si sami, co by vyšlo, kdyby jste hmotnost střely omylem zadali v gramech (tj. $m = 50$).

V uvedeném příkladě bylo relativně jasné, jaké jednotky vzorec vyžaduje. Někdy to ovšem tak jasné není, a pak musíte použít tzv. *rozměrovou analýzu.* Tento proces obecně zkoumá fyzikální vzorce z pohledu jednotek. Aby rovnost byla opravdu rovnost, nestačí jen, aby čísla na obou byla stejná, jak je tomu v matematice. Ve fyzikální rovnici musí být na obou stranách stejné i jednotky! Pokud byste vzali opět náš příklad a chtěli zjistit, jakou jednotku rychlosti máte použít, stačí **dosadit místo neznámých veličin jejich jednotky** následujícím způsobem. Do vyjádření pro výšku

$$h = \frac{E - \frac{1}{2}m.v^2}{m.g}$$

dosadíme

$$[h] = m \qquad [E] = J = kgm^2s^{-2} \qquad [m] = kg \qquad [g] = [a] = ms^{-2} \quad .$$

Nepleťte si značku pro jednotku metr a značku pro veličinu hmotnost, jsou obě stejné (m)! Neznámou jednotku rychlosti $[v]$ hledáme. Tedy rovnost po dosazení jednotek musí vypadat takto:

$$m = \frac{kgm^2s^{-2} - [\frac{1}{2}]kg.[v]^2}{kg.ms^{-2}}$$

$\frac{1}{2}$ je **číselná konstanta** a tedy **nemá jednotku**! Říkáme, že je bezrozměrná. V naší "jednotkové" rovnici ji proto můžeme nahradit jedničkou, a tudíž klidně vypustit:

[13]Obecně je vztah mezi rychlostí v kilometrech za hodinu a metrech za sekundu následující : $v\,[kmh^{-1}] = 3.6 \times v\,[ms^{-1}]$.

$$m = \frac{kgm^2s^{-2} - 1.kg.[v]^2}{kg.ms^{-2}} = \frac{kgm^2s^{-2} - kg.[v]^2}{kg.ms^{-2}}$$

Již v první nebo druhé třídě základní školy jste zajisté slyšeli poučku, že není možné sčítat hrušky a jablka. To je jednoduché vyjádření faktu, že **sčítat a odčítat je možné veličiny pouze ve stejných jednotkách a dokonce ve stejných zlomcích jednotek**! To znamená, že v čitateli musí mít první i druhý člen stejný rozměr a toho dosáhneme pouze v případě, že

$$[v]^2 = m^2s^{-2} \quad ,$$

což po odmocnění odpovídá

$$[v] = ms^{-1} \quad .$$

Zdá se tedy, že rychlost musíme zadat v metrech za sekundu. Pro kontrolu ale raději pokračujme. Dosadíme-li $[v] = ms^{-1}$, získáme

$$m = \frac{kgm^2s^{-2} - kg.m^2s^{-2}}{kg.ms^{-2}} \quad .$$

Oba členy v čitateli mají evidentně shodné jednotky, proto jejich rozdíl bude mít shodnou jednotku. Čitatel tedy touto jednotkou nahradíme:

$$m = \frac{kgm^2s^{-2}}{kg.ms^{-2}} \quad .$$

Jednotky ve zlomku můžeme pokrátit [14]. Zbyde nám

$$m = m$$

a je zjevné, že rovnost platí nejen číselně, ale i jednotkově, bude-li $[v] = ms^{-1}$. Předpokládejme nyní, že do vzorce dosadíme hmotnost nikoliv v kilogramech, nýbrž v gramech. Potom

$$m = \frac{kgm^2s^{-2} - [\frac{1}{2}]g.[v]^2}{g.ms^{-2}} = \frac{kgm^2s^{-2} - g.[v]^2}{g.ms^{-2}}$$

Abychom dosáhli toho, že členy rozdílu v čitateli budou mít stejný rozměr, muselo by

$$[v]^2 = 10^3.m^2s^{-2} \quad ,$$

[14]Což vyplývá z faktu, že odvozené jednotky jsou pouze násobky a podíly jednotek hlavních.

Jenže tento výraz nejde odmocnit tak, aby v něm zůstaly mocniny deseti. Proto zadávat hmotnost v gramech není vůbec možné, pokud také neupravíme jednotku energie. Převedeme-li si energii z joulů na milijouly, změní se nám rovnost na

$$m = \frac{gm^2s^{-2} - g.[v]^2}{g.ms^{-2}} \quad ,$$

neboť

$$E = 1210\ J = 1210000 \times 10^{-3} J = 1210000\ mJ$$

a zároveň

$$E = 1210\ J = 1210\ kg.m^2s^{-2} = 1210000 \times 10^{-3} kg.m^2s^{-2} =$$
$$= 1210000 \times (10^{-3} kg).m^2s^{-2} = 1210000\ gm^2s^{-2}$$

Proto můžeme tvrdit, že $mJ = gm^2s^{-2}$. Postupujme dále:

$$m = \frac{gm^2s^{-2}}{g.ms^{-2}} \quad .$$

a tedy opět

$$m = m \quad .$$

Rozměrová analýza nám může ukázat, v jakých jednotkách máme dosazovat veličiny, a dokonce ověřit, zda ve vzorcích není nějaká hrubá chyba. Čtyři z pěti fyzikářů doporučují: **při každém výpočtu si zkontrolujte jednotky**! Vaše rozevláté výpočty to mnohdy dokáže umravnit a zavést na správnou cestu. A ještě poslední písemkové doporučení: pokud si nejste zcela jisti a nechce se vám provádět sáhodlouhou rozměrovou analýzu, převeďte si všechny použité jednotky na základní [15], pak již chybu neuděláte.

[15] I když i to může být někdy ošemetné.

4. Měření fyzikálních veličin

Již víme, jak je měření ve fyzice důležité. Bez praktického ověření vytvořených teorií by fyzika vůbec nemohla fungovat. Vzpoměňme na mistra cechu tesařského a jeho mlýnské kolo. Představme si, jak se večer v putyce sešel s jinými mistry a začal se holedbat svou teorií o přímé úměře síly a plochy.

$$F = S.F_0 = x^2.F_0$$

vykřikl mistr vzorec, třískaje korbelem o rozviklaný stůl. Již se těšil, jak jej všichni obdivně poplácají po zádech, když v tom jiný mistr řekl: ale to je přeci nesmysl! Určitě je to ve skutečnosti takto:

$$F = x^3.F_0$$

Tak to tedy ne, ohradil se další tesař. Tohle je správně:

$$F = \sqrt{x}.F_0$$

Podobné hádky v tamní hospodě obvykle končili rvačkou, ale ne tentokrát. Debatu první mistr rázně utnul prohlášením : Ale pánové, pravdu mám já, protože jsem si to *změřil*! Kdyby to neudělal, nejenom že by putykou létaly stoly, ale ještě by ani nepostavil mlýn.

Dnešní fyzici nevcházejí do řeky se stoly v rukou a jen výjimečně se v hospodě perou, měří ale často a hojně. Jak to dělají (a jak to budete v hodinách laboratorních cvičení dělat i vy), na to se podíváme v následujících kapitolách. A abychom věděli, o čem mluvíme, musíme si fyzikální měření nějak rozškatulkovat:

- **Pozorování** znamená sledování určitého jevu v přirozených podmínkách. Tak pozorujeme například blesky za bouřky nebo pohyby planet na nebeské klenbě.
- **Pokus** neboli experiment představuje sledování jevu v záměrně uspořádaných laboratorních podmínkách. Při pokusu určitý jev vyvoláváme, měníme okolní podmínky a sledujeme vliv těchto podmínek na průběh jevu. Při pokusu například zahříváme vodu v nádobě a sledujeme závislost teploty kapaliny na elektrickém proudu protékajícím topnou spirálou.
- **Kvalitativní** pozorování či experiment provádíme, chceme-li pouze konstatovat, zda daný jev probíhá či nikoliv. Například američtí kosmonauti na povrchu měsíce provedli kvalitativní pozorování volného pádu různých těles ve vakuu. Pustili z ruky pírko spolu s nějakou kovovou součástkou a zjišťovali, zda dopadnou na zem současně. Tipněte si, co asi zjistili.

- **Kvantitativní** pozorování (experiment) daný jev nějak popisuje - například měříme-li *jak rychle* tělesa padají. Výsledek kvantitativního pokusu zapisujeme ve formě nějakého grafu, tabulky či diagramu. Kvantitativní pozorování volného pádu by mělo třeba následující výstup:

dráha $[m]$	rychlost $[ms^{-1}]$
0.0	0.0
0.5	3.16
1.0	4.47
2.0	6.32
...	...

- **Přímé měření** provádíme jednoduchým porovnáním dané veličiny s nějakým měřidlem. Typický příklad je měření délky metrem nebo vážení miskovými vahami.
- **Nepřímé měření** je stanovení veličiny na základě nějakého fyzikálního vztahu. Například hustotu tělesa zjistíme změřením jeho objemu a hmotnosti a výpočtem $\varrho = m/V$.

4.1. **Chyby měření.** Svět kolem nás není dokonalý a smysly člověka matou. Přiložíte-li pravítko k papíru, abyste změřili délku úsečky, určitě neumístíte nulu k jejímu začátku dokonale, na rysky pravítka se podíváte šikmo a uvidíte tak úsečku končit u jiného čísla, než ve skutečnosti končí, papír s rysem bude krabatý a navíc, odkdy centimetr na školním pravítku měří doopravdy centimetr? Všechny tyto vlivy způsobí, že vámi určená hodnota délky úsečky bude maličko jiná, než je ve skutečnosti. Bude-li po vás délku úsečky měřit váš spolužák, určí nepochybně trochu jiný výsledek než vy - a stejně jako vy trochu jiný, než doopravdy má být.

Namítnete, že přeci víte, jak se zachází s pravítkem - možná, ovšem to vám nepomůže. Naprosto přesně se nedá změřit nikdy nic. Berte jako fakt, že **každé měření je zatíženo chybou**! Tato chyba se dá zmenšit, nikoliv však zcela odstranit. Všechny vlivy, kvůli kterým nelze měřit dokonale, se dají rozčlenit do tří kategorií:

- **Hrubé chyby** jsou způsobeny nepozorností člověka nebo vadou aparatury. Při rýsování uděláte snadno hrubou chybu tak, že k začátku úsečky přiložíte opačný konec pravítka (tedy napčíklad značku 30 cm místo 0 cm). Výsledná hodnota odečtená u konce úsečky je pak samozřejmě naprosto nesmyslná.
- **Systematické chyby** bývají způsobeny nevhodnými měřícími postupy, špatně zkalibrovanými pomůckami nebo přílišným vlivem vnějších podmínek. Například budete-li mít špatně označené pravítko, kde 1 cm bude ve skutečnosti měřit 1.05 cm, vaše měření budou neustále podhodnocena.
- **Náhodné chyby** neboli fluktuace vznikají vždy nezávisle na experimentátorovi a jeho pomůckách. Třeba při měření tlaku bude pokus ovlivňován náhodnými výkyvy v atmosféře, měření délky ovlivní drobné změny okolní

teploty (metr se roztahuje a smršťuje s teplotou) a podobně. Základní charakteristika fluktuací je, že náhodně přidávají i ubírají od správné hodnoty.

Je jasné, že při měření se vždy snažíme učinit chybu co nejmenší. Hrubé chyby se většinou odhalují snadno. Asi každému dojde, že úsečka, která nezabere ani desetinu stránky sešitu, bude mít sotva 27 cm, stejně tak jako do koláče nejsou potřeba čtyři balíčky mouky, když v receptu píší 0.5 kg (kdo by někdy nepoužil špatné závaží, že). Jako v každé lidské činnosti - občasné použití mozku věci rozhodně neuškodí.

Systematické chyby se odhalují podstatně hůř. Někdy si jich fyzik nevšimne vůbec a celé měření je pak k ničemu. Vyvarovat se systematických chyb předpokládá důkladnou kontrolu měřících postupů a před měřením učinit kvalifikovaný odhad výsledku. I tak se ale systematická chybička vloudí…

Náhodné chyby se vyskytují **vždy** a **nelze** se jim vyhnout. Jejich původ sahá až k zákonitostem mikrosvěta, které mají statistický charakter. Proto jsou fluktuace z principu součásti měření a nemá smysl pokoušet se je odstranit. Namísto toho s nimi musíme počítat. Jak, to bude řečeno v kapitole *Zpracování naměřených dat.*

4.2. **Přesnost měření.** Jak jsme si řekli, při měření se nelze úplně vynout chybám. Musíme ale umět chybu, které jsme se dopustili, nějak odhadnout. Podle toho, s jakou chybou jsme měřili, je pak výsledek více či méně přesný. Určení přesnosti je nedílnou součástí každého měření - experiment bez něj postrádá smysl! Ba co víc, měřit a neověřovat přesnost může být někdy i smrtelně nebezpečné!

Jistě jste již někdy slyšeli, že určité druhy zhoubných nádorů lze léčit pomocí ionizujícího záření. Při této léčbě se svazek záření nasměruje na nádorovou tkáň, která vlivem ozáření zahyne. Aby taková terapie byla možná, je třeba znát dosah ionizujícího záření v lidské tkáni. Před lékaři tedy musí zapracovat fyzici a měřit:

"Hola, fyziku," říká lékař. "Chci léčit rakovinu ionizujícím zářením. Můžeš mi, prosím, změřit jeho dosah?"

"Samo sebou," fyzik na to. "Minutku počkej… á, tu to máme. Tedy - při požadované energii je dosah záření v tkáni 5 cm."

Lékař pokýval hlavou, začal léčit - a co se nestalo. Fyzik neměřil moc přesně, dosah záření byl ve skutečnosti 6 cm - a operace se sice podařila, leč pacient zemřel. Kde byla chyba? Základní problém spočíval v tom, že fyzik nezjistil přesnost svého měření. Správně měl rozhovor vypadat takto:

"Hola, fyziku," říká lékař. "Chci léčit rakovinu ionizujícím zářením. Můžeš mi, prosím, změřit jeho dosah?"

"Samo sebou," fyzik na to. "Minutku počkej… á, tu to máme. Tedy - při požadované energii je dosah záření v tkáni 5 cm."

"A s jakou přesností?"

"Přesnost mám 20 procent. To znamená, že dosah může být 5 cm, nebo také až od dvacet procent více nebo méně, tj. $4 - 6$ cm."

"No, fyziku, to si asi děláš legraci, ne? S takovýmhle rozptylem tak maximálně někoho zabiju. Koukej to změřit pořádně, nebo se neznám!"

I zaplul fyzik zpět do laboratoře a po delší a pečlivější práci oznámil nový výsledek.

"Tak jsem to změřil znovu. Dělá to 6 cm s přesností 1 procento (tj. 5.94 – 6.06 cm)."

"Dobrá," na to lékař. "To mi stačí - můžu jít léčit."

Stejné problémy by měl kupříkladu lékárník, kdyby neznal přesnost vah, se kterými odvažuje chemikálie do léků, ještě více životu nebezpečný by byl nepřesný systém pro navádění letadel. Ba dokonce i nepřesný tachometr by mohl způsobit katastrofu - a když ne katastrofu, tak alespoň značnou finanční újmu řidiči. Zapamatujte si, že **nedílnou součástí měření je odhad přesnosti**. Kdo neodhadne přesnost, jako by ani neměřil…

5. Zpracování naměřených dat

Tak tedy - jak na to? Jak určit výsledek měření, když víme, že jej vlastně určit nejde, a jak určit přesnost, s jakou jsme tento neexistující výsledek stanovili? Vlastně celkem snadno. Využijeme základních vlastností náhodných fluktuací :

- Jsou velmi malé
- Je jich velmi mnoho různých druhů
- Každá sama o sobě je zcela náhodná a nezávislá na ostatních
- Jsou se stejnou pravděpodobností kladné či záporné

Tyto vlastnosti, které jste si jistě zařadili do škatulky *no-a-co-má-bejt*, nám umožní určit požadovanou hodnotu velmi efektivně. Předveďme si názorně, co vyplývá z vlastností fluktuací.

Dejme tomu, že v našem hypotetickém měření existují tři fluktuace (označme je I. - III.) a předpokládejme, že každá z nich může nabývat pouze dvou čísel : -0.5 a $+0.5$. Při měření každá zcela náhodně nabude jedné z možných hodnot a k výsledku měření se přidá jejich součet. V tomto případě je možných oprav výsledku měření málo - shrňme si je v přehledné tabulce:

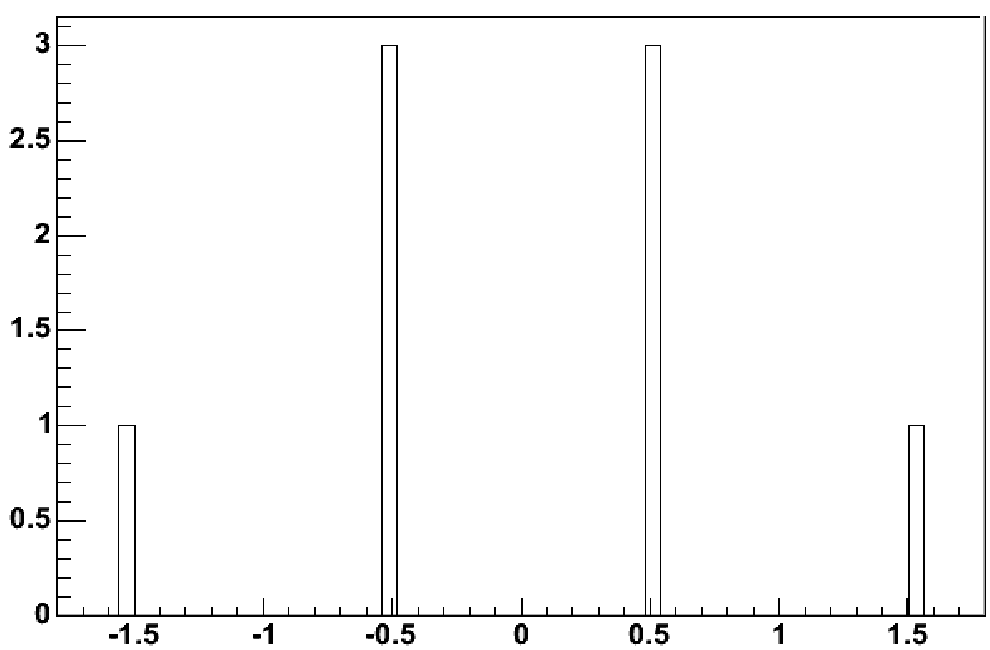
fluktuace I.	fluktuace II.	fluktuace III.	výsledná oprava
-0.5	-0.5	-0.5	-1.5
-0.5	-0.5	+0.5	-0.5
-0.5	+0.5	-0.5	-0.5
-0.5	+0.5	+0.5	+0.5
+0.5	-0.5	-0.5	-0.5
+0.5	-0.5	+0.5	+0.5
+0.5	+0.5	-0.5	+0.5
+0.5	+0.5	+0.5	+1.5

Všimněte si, že ač je všech možných kombinací, které fluktuace mohou vytvořit, osm, v celkové opravě se mohou objevit pouze čtyři možná čísla : -1.5 , -0.5 , 0.5 a 1.5 . Polovina a minus polovina se ale v tabulce vyskytují třikrát, zatímco 1.5 (kladné i záporné) jsou tam jen jednou. To proto, že tato čísla lze dostat právě jednou kombinací tří náhodných fluktuací, zatímco poloviny lze získat ze tří různých kombinací. Proto se v tomto poměru $(1 : 3 : 3 : 1)$ budou objevovat při měřeních odchylky od zcela přesného výsledku o hodnoty -1.5 , -0.5 , 0.5 a 1.5 . Na obr. 1 jsou vyneseny četnosti těchto čtyř hodnot do grafu (jedná se vlastně o grafické znázornění zmíněného poměru). Takovému grafu se obvykle říká *rozdělení* dané veličiny.

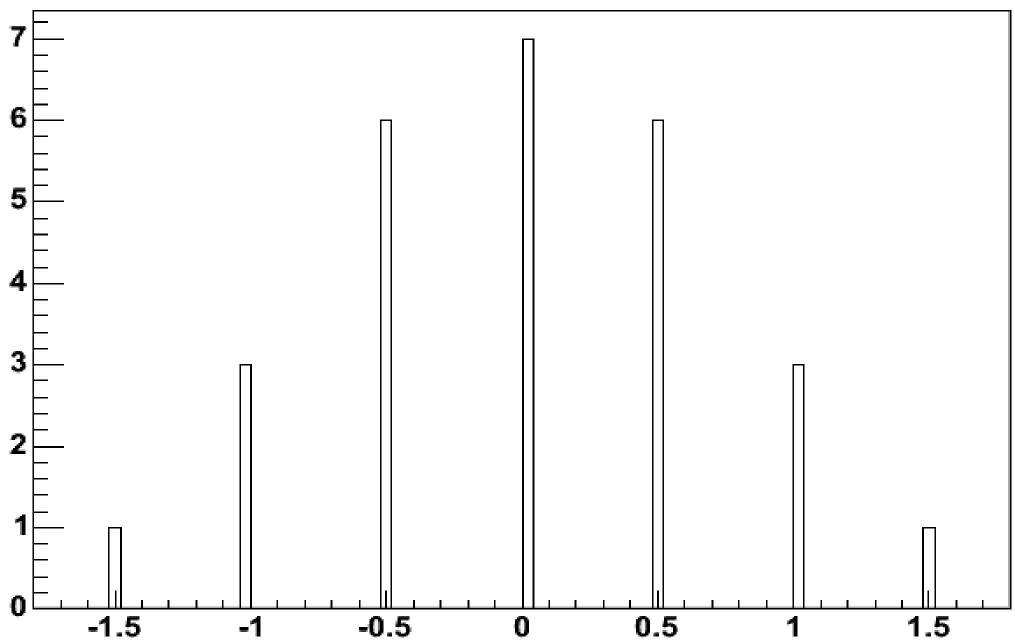
Vezměme poněkud složitější případ - fluktuace budou opět tři, mohou ale nabývat hodnot -0.5 , 0.0 a 0.5 . Tabulka bude nyní podstatně větší:

I.	II.	III.	opr.	I.	II.	III.	opr.	I.	II.	III.	opr.
-0.5	-0.5	-0.5	-1.5	0.0	-0.5	-0.5	-1.0	+0.5	-0.5	-0.5	+0.5
-0.5	-0.5	0.0	-1.0	0.0	-0.5	0.0	-0.5	+0.5	-0.5	0.0	0.0
-0.5	-0.5	+0.5	-0.5	0.0	-0.5	+0.5	0.0	+0.5	-0.5	+0.5	+0.5
-0.5	0.0	-0.5	-1.0	0.0	0.0	-0.5	-0.5	+0.5	0.0	-0.5	0.0
-0.5	0.0	0.0	-0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	+0.5	0.0	0.0	+0.5
-0.5	0.0	+0.5	0.0	0.0	0.0	+0.5	+0.5	+0.5	0.0	+0.5	+1.0
-0.5	+0.5	-0.5	-0.5	0.0	+0.5	-0.5	0.0	+0.5	+0.5	-0.5	+0.5
-0.5	+0.5	0.0	0.0	0.0	+0.5	0.0	+0.5	+0.5	+0.5	0.0	+1.0
-0.5	+0.5	+0.5	+1.0	0.0	+0.5	+0.5	+1.0	+0.5	+0.5	+0.5	+1.5

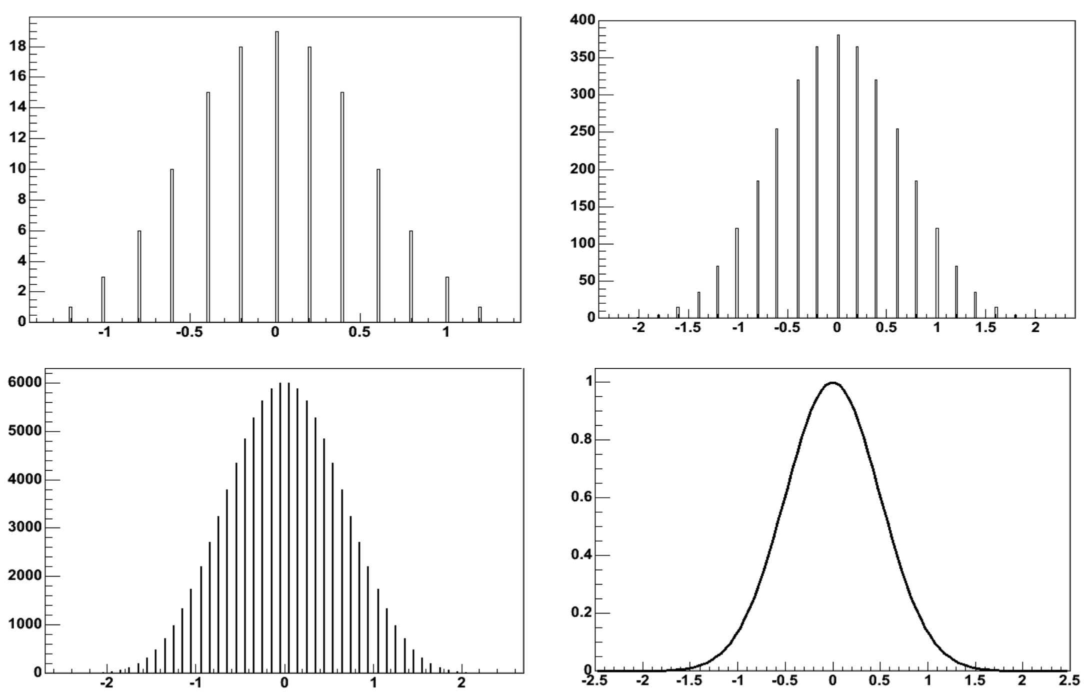
V jakém poměru se zde čísla vyskytují je jasné z obr. 2



Obrázek 1. Rozdělení odchylky od výsledku při třech fluktuacích o možných hodnotách -0.5 a 0,5 .



Obrázek 2. Rozdělení odchylky od výsledku při třech fluktuacích o možných hodnotách -0.5, 0.0 a 0,5 .



Obrázek 3. Rozdělení odchylky od výsledku při více fluktuujících proměnných a povolených hodnotách.

Budeme - li zvyšovat počet fluktuujících proměnných a počet jejich možných hodnot, začne graf rozdělení nabývat jistého specifického tvaru, jak je možné vidět na obr. 3. Zde jsou znázorněna čtyři rozdělení. Vlevo nahoře je rozdělení vytvořené pomocí tří fluktuací, každá znich má ale pět povolených hodnot. Vpravo nahoře je rozdělení tvořené pěti proměnnými o pěti hodnotách, vlevo dole rozdělení tvořené pěti proměnnými o deseti hodnotách. Vpravo dole je pak zakresleno rozdělení tvořené nepředstavitelně obrovským počtem proměnných s neomezeným počtem hodnot (tj. každá proměnná může nabývat libovolného čísla z nějakého velmi úzkého okolí nuly). V takovém případě je rozdělení spojitá křivka [16].

Jak ale díky tomu můžeme dobře měřit? I když si nyní umíme znázornit součet fluktuací do grafu, stejně při měření nevíme, kolik fluktuujících proměnných nám výsledek opravuje (ač můžeme předpokládat, že jejich počet je značný), kolika hodnot mohou nabývat a už vůbec neumíme zjistit, která kombinace právě "padla". Trik spočívá v tom, že neprovádíme měření pouze jednou, ale opakovaně. Každou naměřenou hodnotu totiž fluktuace poopraví pokaždé jinak - náhodně - budou se ale **vždy** řídit pravidly, která jsme si právě uvedli. Proto zaneseme - li si všechna měření do grafu, dostaneme obrazec velmi podobný křivce, kterou vidíme na obr. 3 vpravo dole. A protože víme, že vrchol této křivky odpovídá **celkově nulové náhodné chybě**, bude hledaný výsledek ležet na ose x nejspíše právě pod ním. Příklad takového měření je na obr. 4. Zde bylo postupně naměřeno [17] a vyneseno do grafu[18] půl milionu hodnot. Tvar křivky je jasně patrný.

A jak na to v praxi? Dejme tomu, že jsme učinili 10 měření (třeba délky); označme je $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$. Předpokládáme-li, že tyto body jsou rozděleny podle křivky na obr. 3 vpravo dole, tj. že jejich nejpravděpodobnější poloha je někde kolem maxima křivky a na jejích "chvostech" daleko od středu budou jen neuvěřitelnou náhodou, pak střed křivky leží s nejvyšší určitostí v bodě

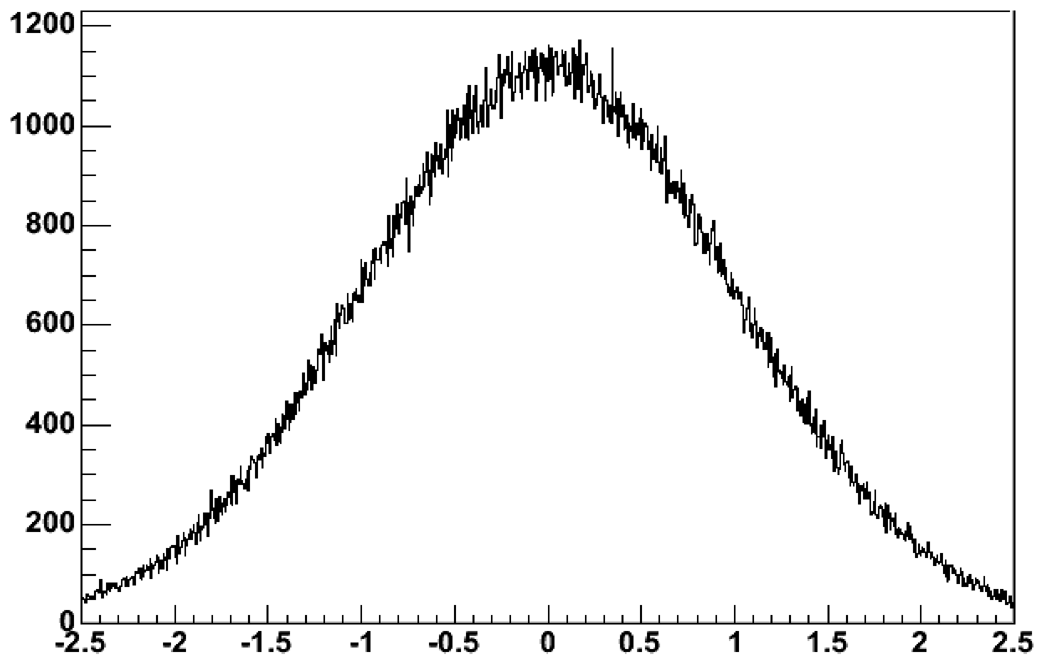
$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}}{10}$$

To je, jak zajisté každý vidí, aritmetický průměr z naměřených hodnot - tedy žádná velká věda. Získat přesnost měření už tak jednoduché není. Po krátkém zamyšlení asi přijdete na to, že přesnost měření má co dělat s velikostí chyb a fluktuací. Je také asi celkem zřejmé, že čím menší jsou fluktuace, tím "užší" bude rozdělení (viz. obr. 5). Jak ale z našich deseti naměřených hodnot dojít k procentům a intervalům, o kterých se v příkladu na str. 21 bavili lékař a fyzik? Výpočet šířky rozdělení z naměřených hodot už tak jednoduchý není a proto se jím nebudeme zabývat. Zjednodušíme si život odhadem.

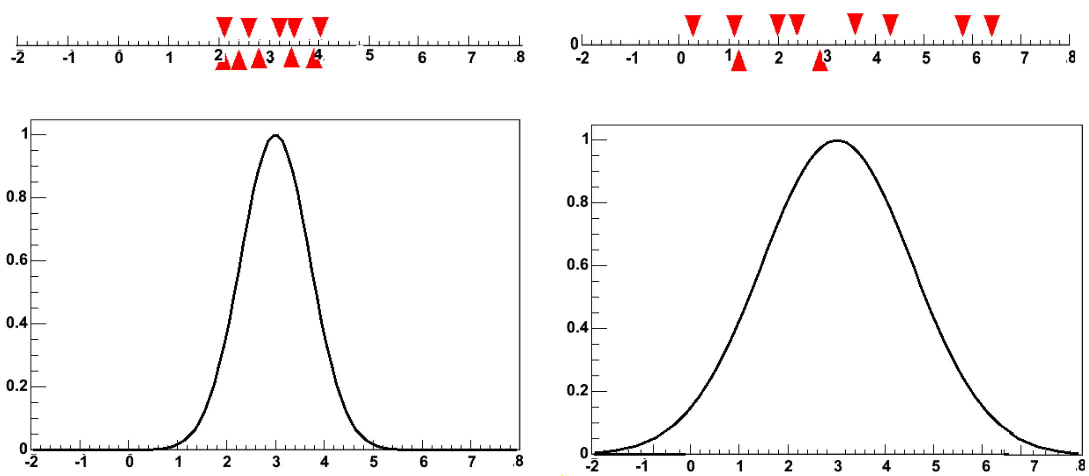
[16] Tato velmi důležitá křivka se nazývá Gaussova a setkáte se s ní v závěrečných ročnících gymnázia při hodinách matematiky. Všimněte si jenom, že její maximum má hodnotu jedna, ačkoliv na předchozích grafech jsou maxima podstatně vyšší. To proto, že posledním případě by maximum bylo nepředstavitelně vysoké (je úměrné počtu fluktuujících proměnných) a proto je jím celá funkce křivky vydělena. Vydělením konstantou se poměry samozřejmě nezmění; 1 : 2 : 4 : 2 : 1 je totéž, co 0.25 : 0.5 : 1 : 0.5 : 0.25 .

[17] Ovšem nejedná se o žádné reálné měření, pouze počítačem provedenou simulaci.

[18] Graf, kde na jedné z os jsou intervaly a na druhé počet veličin, které do toho kterého intervalu padly, se nazývá histogram.



Obrázek 4. Velký počet měření (0.5 mil) téže veličiny vynesený do grafu. Osa x je rozdělena na 1000 malých intervalů, na ose y je pak počet měření, které do každého z těchto intervalů padly. Takové formě zobrazení se obvykle říká *histogram*.



Obrázek 5. Naměřené hodnoty a příslušná rozdělení při velké (vlevo) a malé (vpravo) přesnosti. Oba soubory hodnot mají stejný aritmetický průměr (3.0).

Z obr. 5 vidíte, že v přesnějším měření se body $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ "motají" kolem svého aritmetického průměru mnohem těsněji, než v měření méně přesném. Odhadneme tedy míru přesnosti jako **průměrnou vzdálenost naměřených bodů od**

aritmetického průměru. Vzdálenost dvou bodů na číselné ose je určena jejich rozdílem. Pro každý naměřený bod tedy vypočítáme rozdíl

$$\begin{array}{ccc} x_1 & \dots & \bar{x} - x_1 \\ x_2 & \dots & \bar{x} - x_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{10} & \dots & \bar{x} - x_{10} \end{array}$$

Musíme ale dát pozor, neboť pro body, které leží napravo od aritmetického průměru, je tento rozdíl záporný, kdežto vzdálenost je vždy kladná. Vyjde-li záporné číslo, musíme minus umazat. Tato operace se v matematice vyjadřuje pomocí tzv. *absolutní hodnoty* (značeno svislými čarami). Výraz $|\bar{x} - x_i|$ je roven $\bar{x} - x_i$ pro body nalevo od průměru a $x_i - \bar{x}$ pro body napravo. Průměrnou vzdálenost bodů od aritmetického průměru pak spočítáme jako

$$\Delta x = \frac{|\bar{x} - x_1| + |\bar{x} - x_2| + \dots + |\bar{x} - x_{10}|}{10}$$

Interval, ve kterém se hledaný výsledek nejpravděpodobněji nachází pak je $(\bar{x} - \Delta x, \bar{x} + \Delta x)$, přesnost v procentech vypočteme jako $\Delta x/\bar{x} \times 100\%$. Příklad : máme naměřené hodnoty 1.12 cm, 1.08 cm, 1.13 cm, 1.05 cm, 0.98 cm, 1.14 cm, 1.25 cm, 1.17 cm. Spočítáme aritmetický průměr :

$$\bar{x} = \frac{1.12 + 1.08 + 1.13 + 1.05 + 0.98 + 1.14 + 1.25 + 1.17}{8} = \frac{8.92}{8} = 1.115\, cm$$

Sestavme si přehlednou tabulku, shrnující další výpočty :

x_i	$\bar{x} - x_i$	$\lvert\bar{x} - x_i\rvert$
1.12	-0.005	0.005
1.08	$+0.035$	0.035
1.13	-0.015	0.015
1.05	$+0.065$	0.065
0.98	$+0.135$	0.135
1.14	-0.025	0.025
1.25	-0.135	0.135
1.17	-0.055	0.055
$\bar{x} = 1.115$		$\Delta x = 0.05875$

Výsledek pak zapíšeme ve tvaru

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \quad [jednotka]$$

ovšem tak, aby souhlasil počet desetinných míst. V tomto příkladě je třeba zaokrouhlit Δx na tři desetinná místa:

$$x \; = \; 1.115 \pm 0.059 \quad cm$$

Při tomto měření jsme dosáhli přesnosti $0.059/1.115 \times 100\% \; = \; 5.29\%$. Nyní si ještě zrekapitulujme vzorce pro libovolný počet (n) měření:

$\bar{x} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)$	Nejpravděpodobnější výsledek
$\Delta x = \frac{1}{n}\left(\lvert\bar{x} \, - \, x_1\rvert \, + \, \ldots \, + \, \lvert\bar{x} \, - \, x_n\rvert\right)$	Průměrná odchylka
$x = \bar{x} \pm \Delta x$	Zápis výsledku měření
$p = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \times 100\%$	Procentuální přesnost

6. Prezentace výsledků

Fyzik má naměřeno, fyzik má spočítáno, výsledky se na něj smějí - ale cosi stále schází. Věc důležitá a nezbytná - prezentace vykonané práce. Nikdo nevykonává fyzikální měření sám pro sebe. Vždy je nutné, aby se o experimentátorově práci dozvěděli ostatní - jak teoretici, kteří dle naměřených hodnot vytváří své matematické modely, tak další experimentátoři, jejichž měření mohou na daný pokus navázat. Pokud své údaje neprezentujete ve formě srozumitelné dalším vědcům, pracovali jste zbytečně.

Obvyklou formou prezentace výsledků bývá článek v odborném časopise, nicméně pro potřeby laboratorních cvičení na středních školách je takový literární útvar zbytečně rozsáhlý. Postačí, když budete výsledky vašich měření předkládat ve fromně tzv. *protokolů*. To je zjednodušený zápis o provedeném měření. Měl by se skládat z následujících částí:

(1) **MOTIVACE**
V úvodu protokolu by mělo být napsáno co budete měřit a proč - jaká je vaše motivace k provedení experimentu[19], co chcete ověřovat a proč je to důležité.

(2) **ÚVOD DO TEORIE**
Zde by měly být vysvětleny základy teorie, kterou chcete ověřovat. Není ovšem nutné zabíhat do podrobností - pokud se čtenář bude chtít seznámit s teroií do hloubky, vezme si k ruce specializovanou literaturu. Zde také uvedete, jaký výsledek přibližně očekáváte a proč.

(3) **POPIS APARATURY A POSTUPU MĚŘENÍ**
V této části je třeba popsat aparaturu a postup měření. Narozdíl od úvodu do teorie, popisu aparatury a postupu měření je třeba věnovat značný prostor. Podle vašeho popisu by kterýkoliv jiný fyzyk měl být schopen experiment zopakovat - a dojít ke shodným výsledkům! Nezapomeňte tedy vypsat veškeré pomůcky, návod k sestavení aparatury a hlavně princip její funkce. Velmi žádoucí je nákres. Můžete připojit i fotografie, máte-li tu možnost.

(4) **NAMĚŘENÉ HODNOTY**
Zde vložíte tabulku s naměřenými hodnotami.

(5) **ZPRACOVÁNÍ DAT A VÝSLEDKY**
Pomocí dříve popsané metody zpracujte data, získáte nejpravděpodobnější hodnotu měřené veličiny a odhadnete přesnost.

(6) **DISKUSE A ZÁVĚR**
Na tomto místě uvedete konečné výsledky ve správném tvaru, srovnáte je s hodnotami, které předpovídá teorie a s vlastními předběžnými odhady. Pokud se výsledky významně liší od očekávání, napište svůj názor proč tomu tak je.

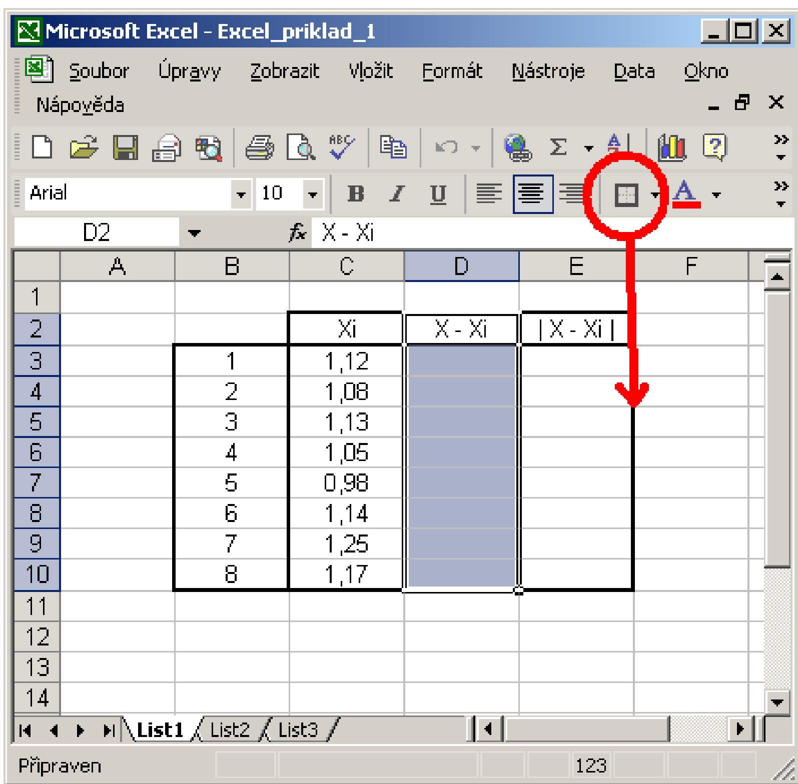
---

[19] Motivace "Náš fyzikář nám to nařídil" se obvykle bere jako nedostatečná :-).

7. Využití výpočetní techniky v experimentální fyzice

Moderní experimenty jsou velmi složité a poskytují značné množství dat. Ty tam jsou doby, kdy se fyzici choulili v malé, zatemněné místnosti nad scintilační deskou, počítali jednotlivé světelné záblesky, iniciované částicemi ionizujícího záření a psali si čárky. Dnešní experimentátoři musí být schopni sledovat miliony takových "záblesků" za sekundu - což, jak jitě sami uznáte, není v možnostech žádné lidské bytosti. Současná fyika proto hojně využívá služeb počítačů. Tyto všestranné nástrojne nejen automaticky odečítají údaje z přístrojů, ale zároveň jim i říkají, co a jak mají měřit a hlavě dokáží nesmírně ulehčit konečné zpracování dat. Mohou zjednodušit život i vám, budete-li výsledky měření z hodin laboratorních cvičení zpracovávat v nějakém vhodném programu.

Podívejme se například, jak lze ukázkové měření ze stránky 28 zpracovat v programu MS Excel [20]. Začneme tím, že si vytvoříme tabulku s měřeními, jak je naznačeno na obr. 6.



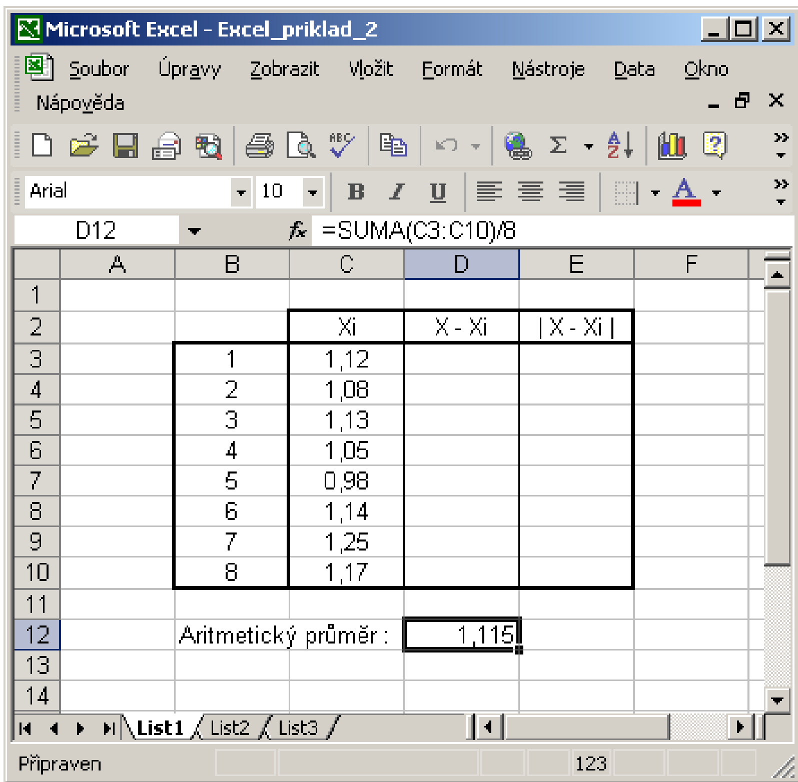
Obrázek 6. Tabulka s měřeními zanesena do programu MS Excel. Hodnoty čísel a nadpisy sloupců se vpisují ručně, orámování tabulky lze sestavit pomocí výběru patřičných buněk levým tlačítkem a klepnutím na jednu z možností, skrývajícími se pod ikonou v červeném kroužku.

[20] Nebo v podobném tabulkovém procesoru jako nabízí např. kancelářské balíky OpenOffice nebo 602Suite.

Nyní je třeba spočítat aritmetický průměr. To znamená sečíst všechny čísla v buňkách C3 až C10 a výsledek vydělit osmi. K sčítání řady čísel slouží v Excelu příkaz *suma()* (resp. *sum()* v anglické verzi), který použijeme následovně:

```
=SUMA(C3:C10)/8
```

Opište tento řádek do buňky D12 [21] - měl by se vám vypsat aritmetický průměr naměřených hodnot tak, jak je to na obr. 7. Abyste nezapoměli význam tohoto čísla, je vhodné si jej poznamenat (vepsáním řetězce "Aritmetický průměr" do buňky B12).



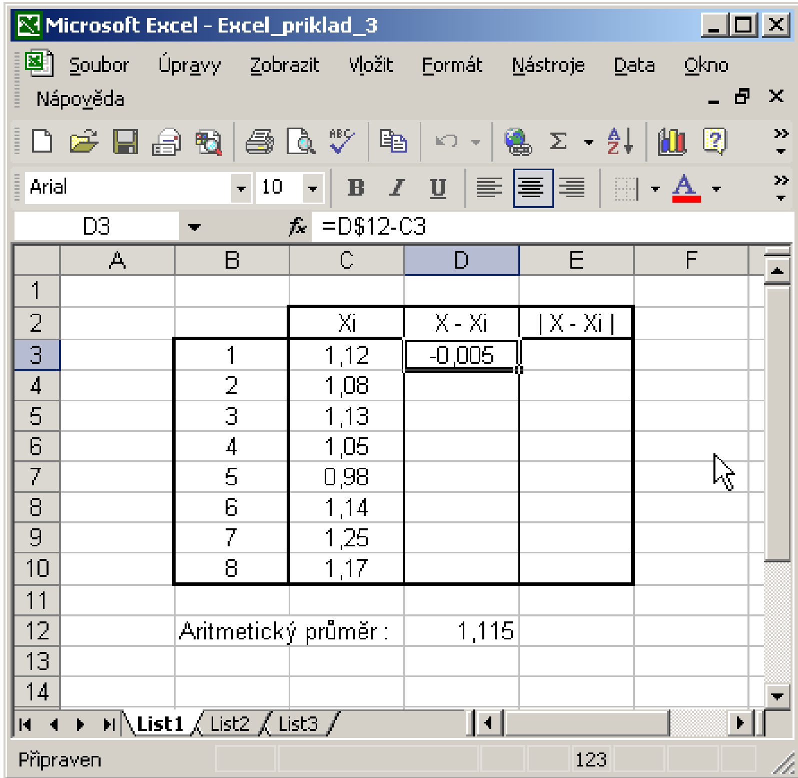
Obrázek 7. Výpočet aritmetického průměru lze programu nařídit pomocí příkazu =SUMA(C3:C10)/8 vepsaného do libovolně zvolené buňky.

Rozdíl hodnot vybraných buněk je možné snadno spočítat pomocí příkazu = buňka 1 - buňka 2. První ze vzdáleností $\bar{x} - x_i$ zjistíme zadáním

```
=D$12-C3
```

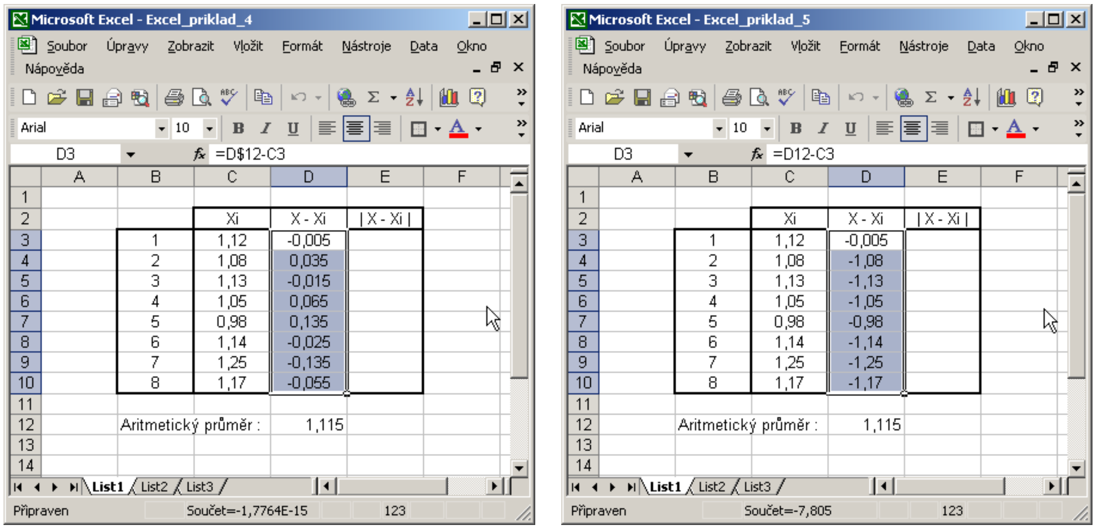
do buňky D3. Znak $ před číslem řádky znamená, že číslo se nebude měnit při kopírování obsahu buňky do jiné. To je samozřejmě žádoucí, neboť buňka, ve které je uložena hodnota aritmetického průměru je stále stejná, zatímco číslo buňky obsahující x_i se pro každé měření liší. Výsledek vidíte na obr. 8

[21] Případně nějaké jiné dle vašeho výběru.

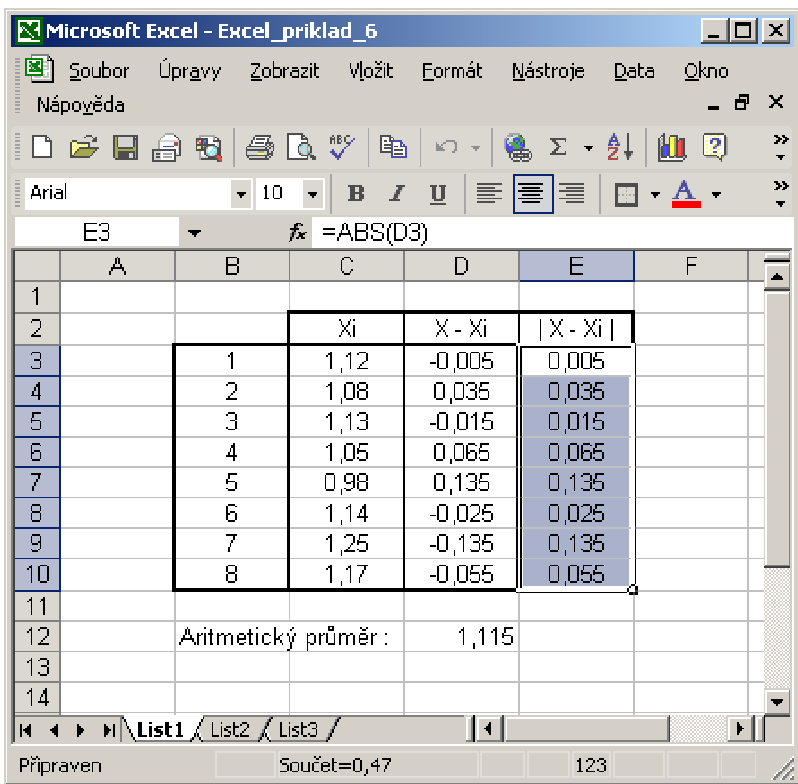


Obrázek 8. Výpočet rozdílu aritmetického průměru a prvního měření.

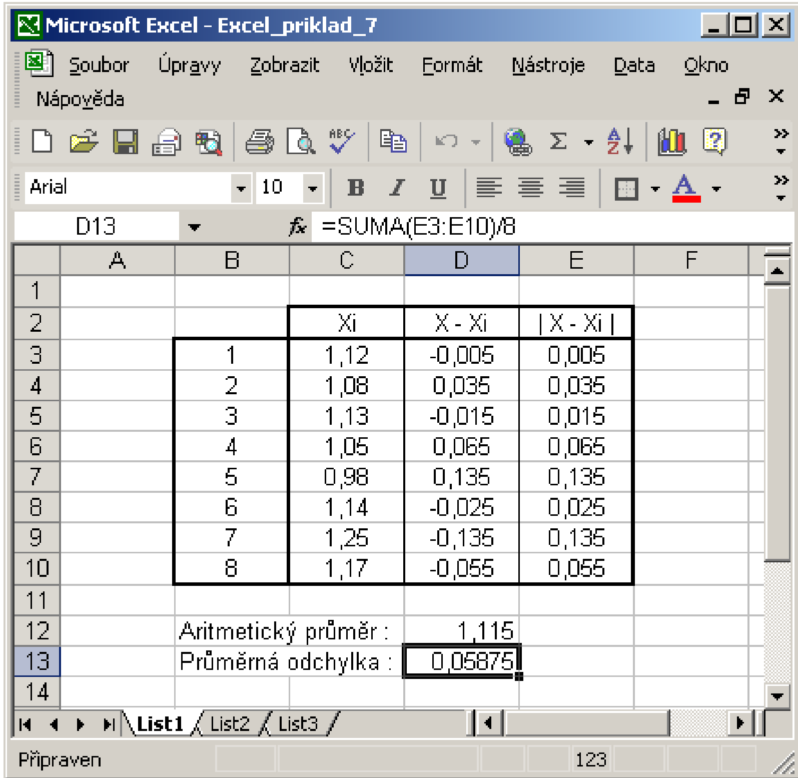
Nyní je třeba udělat stejný výpočet pro ostatní měření. Patřičné příkazy buď můžete zadat ručně, nebo použít funkci kopírování buněk. Klepněte na buňku D3, ve které je uložen rozdíl pro první měření, pak chytněte levým tlačítkem myši malý černý čtvereček v pravém dolním rohu buňky a přesuňte ukazatel myši tak, aby se nalézal v buňce D10 (kde by měl být rozdíl pro poslední měření). Poté, co pustíte tlačítko, Excel zkopíruje obsah první buňky do všech ostatních a to tak, že bude měnit čísla řádků označujících jednotlivá x_i. Kdybyste dříve nevepsali znak $ před číslo řádku do identifikátoru buňky s aritmetickým průměrem, program by jej měnil také a výsledkem by bylo něco, co jste vůbec neměli v plánu (viz obr. 9).



Obrázek 9. Výpočet rozdílů aritmetického průměru a všech měření. Vlevo správně použitá funkce kopírování buňek, vpravo špatně (zapomenutý znak $).



Obrázek 10. Aplikace absolutních hodnot na rozdíly.



Obrázek 11. Hotová tabulka s výsledky.

V následujícím kroku musíme "umazat mínusy" - tedy aplikovat absolutní hodnotu. K tomu slouží příkaz *abs()*. Zapište jej do buňky E3 ve tvaru

```
=ABS(D3)
```

a zkopírujte do ostatních buněk stejně jako předtím příkaz k odečtení x_i od aritmetického průměru. Měli byste dostat výsledek shodný s výsledkem na obr. 10.

Nyní již zbývá jen spočítat průměrnou vzdálenost od aritmetického průměru - zajisté již není třeba říkat jak na to. Po tomto posledním úkonu by tabulka měla vyhlížet jako na obr. 11 - stačí ji jen vytisknout a přiložit k protokolu.

Reference

[1] M. Macháček: Encyklopedie fyziky
Mladá Fronta, fond AV ČR (**1995**)

[2] E. Svoboda a kol.: Přehled středoškolské fyziky
Státní pedagogické nakladatelství Praha (**1991**)

[3] Kolektiv KF FJFI ČVUT: Fyzika I - Laboratorní cvičení
Vydavatelství ČVUT (**1998**)

[4] J. Brož, V. Roskovec: Základní fyzikální konstanty
Státní pedagogické nakladatelství Praha (**1987**)

[5] M. Bednařík a kol.: Fyzika pro gymnázia - Mechanika
Vydavatelství Prométheus (**1993**)

Poznámky a připomínky k textu zasílejte na email gdermog@seznam.cz . Děkuji.

Vladimír Pospíšil